ホップ代数の拡大(群スキームの変形と整数論への応用)

増岡, 彰

数理解析研究所講究録
942巻 1996年 53-65

ホップ代数の拡大

島根大　増岡　彰（Akira Masuoka）

<u>はじめに</u>　おおざっぱに言って空間と可換代数とが対応し，演算を付帯させて群と可換ホップ代数とが対応する．そこで非可換なホップ代数を「非可換群」と捉え群論の結果をホップ代数に拡張しよう，という試みが1960年代Chase-Sweedlerによるこの分野の誕生以来なされてきた．彼らより少し遅れて，G. Kacは同じ精神のもと作用素環論の立場から＊構造をもつホップ代数（彼の呼ぶring groups）を研究し優れた業績を挙げたが，Chase-Sweedler学派の人々にはつい最近まで知られていなかったように思われる（唯一Kaplanskyのレクチャー・ノート“Bialgebras”の文献にKacの論文を見つけることができる）．一方，作用素環論においてring groupsは現在カッツ代数と呼ばれ注目を浴びている．ただ，例えばEnock-Schwartzの教科書に見られるようにその取扱いは多分に解析的であって，筆者にとっては代数的なKacの原論文の方がわか

りやすい．

さて，群拡大の理論はSinger，Hofstetterらによりホップ代数にまで拡張され，非可換なホップ代数を構成するひとつの方法を提供している．しかしKacはそれ以前に有限ring groupsの拡大論を確立しており[K]，前者に比し一般性では劣るものの特有の結果も有しより興味深い．この小文では，Kacによる拡大論を現代流（またはホップ代数流）に少しアレンジしたうえ解説し，拡大のなす群（Opext 群）のいくつかの計算例を与えたい．

記号　kを基礎体とし，テンソル積，代数，ホップ代数等k上のものをさす．扱うホップ代数はすべてk上有限次元のものである．

トリビアルなホップ代数　Gを有限群とするとき，直ちに次の2つのホップ代数が構成される．

<例> 群環 kG．ただし余積△，余単位元ε，対合（antipode）Sは次で定義される：

$$\Delta(s) = s\otimes s, \quad \varepsilon(s) = 1, \quad S(s) = s^{-1} \quad (s\in G)$$

<例> Gの関数環 $k^G = \mathrm{Map}(G,k)$（＝関数 $G\to k$ の全体）．ただし積はpoint-wiseに定義される．$s\,(\in G)$ の特性関数を e_s （$e_s(t)=\delta_{st}$）とするとき△，ε，Sは次で定義される：

$$\Delta(e_s) = \sum_{t\in G} e_t\otimes e_{t^{-1}s}, \quad \varepsilon(e_s) = \delta_{1s}, \quad S(e_s) = e_{s^{-1}}. \quad \square$$

ここで kG と k^G は互いに双対であり，$\{s\}$，$\{e_s\}$ は互いに双対基底をなす．これらは次のように特徴づけられる．

〈命題〉 k を代数閉体とする．有限次元ホップ代数が（代数として）可換かつ半単純ならば k^G の形；双対に，余可換かつ余半単純（双対が可換かつ半単純）ならば kG の形である．

□

上記2種のホップ代数をトリビアルなホップ代数と呼んでよいであろう．ノン・トリビアルなホップ代数を構成するのに kF の k^G による拡大（F, G 有限群）を考察する方法がある．

群拡大　まず（アーベル核をもつ）群拡大について復習しよう．Γ を群，M を加法群とし，群の短完全列または Γ の M による拡大

$$0 \to M \xrightarrow{\iota} E \xrightarrow{\pi} \Gamma \to 1$$

が与えられたとする（アーベル核とは M がアーベルを意味する）．このとき，

$$\iota(\gamma m) = \bar{\gamma}\,\iota(m)\,\bar{\gamma}^{-1} \quad (\gamma \in \Gamma,\ m \in M)$$

により M に左 Γ 加群としての作用がひきおこされる．ここで $\bar{\gamma} \in E$ は $\pi(\bar{\gamma}) = \gamma$ をみたし（つまり $\gamma \longmapsto \bar{\gamma}$ は π のセクション），明らかにそのとり方によらず上記作用は決る．さて M の Γ 作用を1つ固定するとき，それをひきおこす拡大全

体の同形類 $\mathrm{Opext}(\Gamma, M)$ は Baer 積によりアーベル群をなす．その単位元は $E = M \rtimes \Gamma$（固定した作用に関する半直積），ι，π は自明なもの，なる拡大の類．さらにこの群はコホモロジー群 $H^2(\Gamma, M)$ と同形である．

<u>ホップ代数拡大の定義</u>　有限群 F, G を固定するとき，

$$(A):\quad k^G \xrightarrow{\iota} A \xrightarrow{\pi} kF$$

の形の拡大のみを考える．ここに，A は有限次元ホップ代数（Δ_A, ε_A を余積，余単位元とする），ι, π はホップ代数射である．

〈定義〉（A）が（kF の k^G による）<u>拡大</u>であるとは，

　　ι が単射，π が全射　かつ

$$\mathrm{Im}\,\iota = \{a \in A \mid (I \otimes \pi)\circ\Delta_A(a) = a \otimes 1\}$$

をみたすこと。□

　このとき，各 $x \in F$ につき

$$A_x := \{a \in A \mid (I \otimes \pi)\circ\Delta_A(a) = a \otimes x\}$$

を x 成分として $A = \bigoplus_{x \in F} A_x$ は F の次数つき代数，$A_1 = k^G$，となることは容易にわかる．さらに大事なのは，

〈命題〉 A は F の接合積である：$A = k^G * F$．もっとくわしく，各 $x \in F$ につき A の可逆元 $\bar{x}$ が存在して

$$A_x = k^G \bar{x},\quad \varepsilon_A(\bar{x}) = 1,\quad \bar{1} = 1$$

をみたす．□

上のように特別な場合に定義を述べるとかえってわかりにくいかもしれない．有限次元ホップ代数の拡大 $K \xrightarrow{\iota} A \xrightarrow{\pi} H$ が，$\mathrm{Ker}\,\pi = K$，$\mathrm{Coker}\,\iota = H$ が同値という意味で合理的に定義でき，必ず弱い意味で split（我々の用語で cleft）するのである．上記 $x \longmapsto \bar{x}$ が"セクション"である．

<u>Matched pairs</u>　さて拡大（A）から相互作用

$$\triangleright : G \times F \longrightarrow F, \quad \triangleleft : G \times F \longrightarrow G$$

がひきおこされることを見る．これらは一般に（群同形でなく）集合同形の作用である．

上で見たように $A = k^G * F$（接合積）だから，F は k^G に通常のように

$$x \rightharpoonup e_s = \bar{x}\, e_s\, \bar{x}^{-1} \quad (x \in F,\ s \in G)$$

により代数同形として作用し，k^G が可換だから $\bar{x}$ のとり方に依らない．さらに k^G は直交巾等元 e_s で張られるから，

$$x \rightharpoonup e_s = e_{s \triangleleft x}$$

により一意に決る作用 $\triangleleft$ が得られる．（A）の双対

$$kG \xleftarrow{\iota^*} A^* \xleftarrow{\pi^*} k^F$$

を考え左右交換して議論することにより，もう一方の作用 $\triangleright$ が得られる．

勝手な $\triangleright$, $\triangleleft$ がひきおこされるわけではない．

〈命題〉 $\triangleright, \triangleleft$ がみたすべき条件は，直積 $F \times G$ が

$$(x, s)(y, t) = (x(s \triangleright y), (s \triangleleft y)t),$$

ただし $x, y \in F$, $s, t \in G$, を積として $(1,1)$ を単位元にもつ群をなすこと．

〈定義〉[T] 上記条件をみたす $\triangleright, \triangleleft$ を構造としてペア (G, F) を matched pair と呼ぶ．群 $F \times G$ のかわりに $F \bowtie G$ と書く．

Opext群 matched pair (G, F) を固定し，その構造 $\triangleright, \triangleleft$ をひきおこす拡大全体の同形類（同形の定義は明らかであろう）を $\mathrm{Opext}(kF, k^G)$ と書く．

2つの拡大 $K = k^G \longrightarrow A_i \longrightarrow kF$ $(i = 1, 2)$ に対し，そのテンソル積から下図のように pull-back, push-out により拡大 $(A_1) \cdot (A_2)$ を得る：

$$\begin{array}{ccccc}
K \otimes K & \longrightarrow & A_1 \otimes A_2 & \longrightarrow & kF \otimes kF \\
\| & & \uparrow & \text{p.b.} & \uparrow \Delta \\
K \otimes K & \longrightarrow & B & \longrightarrow & kF \\
\text{積} \downarrow & \text{p.o.} & \downarrow & & \| \\
K & \longrightarrow & A_1 \cdot A_2 & \longrightarrow & kF
\end{array}$$

具体的には

$$B = \bigoplus_{x \in F} (A_1 \otimes A_2 \text{ に於る } (x, x) \text{ 成分}),$$

$$A_1 \cdot A_2 = K \underset{K \otimes K}{\otimes} B \quad (\text{積 } K \otimes K \longrightarrow K \text{ に関する係数拡大}).$$

〈命題〉 $\mathrm{Opext}(kF, k^G)$ は上で定義される積によりアーベル群をなす．bismash 積 $k^G \# kF$ [T] を中項（ι, π 自明）に持つ拡大の類が単位元．

<u>計算例2つ</u>　3つの matched pairs に関し Opext 群の計算結果を示すのが目的である．

作用 $\triangleright : G \times F \longrightarrow F$ がトリビアル（$s \triangleright x = x, \forall s \in G, x \in F$），$\triangleleft : G \times F \longrightarrow G$ が群同形の作用ならば，これらは matched pair (G, F) の構造であり，$F \bowtie G = F \ltimes G$（半直積）となることに注意しよう．また正整数 n に対し C_n は位数 n の巡回群を表すものとし，

$$\mu_n = \mu_n(k) = \{\zeta \in k \mid \zeta^n = 1\},$$
$$k^{\cdot} = k \setminus \{0\} \quad (\text{乗法群})$$

とする．

〈定理〉（cf. [K]）次で定義される matched pair を考える：

$F = C_2 = \langle x \rangle$，　$G = C_n \times C_n = \langle a \rangle \times \langle b \rangle$，

$\triangleright$ トリビアル，　$\triangleleft$ は $a^i b^j \triangleleft x = a^j b^i \ (i, j \in \mathbb{Z}/n)$

で定義される群同形の作用．

$(k^{\cdot})^2 = k^{\cdot}$，$(k^{\cdot})^n = k^{\cdot}$ ならば　$\mathrm{Opext}(kF, k^G) \simeq \mu_n$．□

$\zeta \in \mu_n$ に対応する拡大 $k^G \xrightarrow{\iota} A_\zeta \xrightarrow{\pi} kF$ は次のように定義される．$K = k^G = \sum_{i,j \in \mathbb{Z}/n} k e_{ij}$（$e_{ij}$ は $a^i b^j$ の双対基底）とおく．<u>K環</u>とは代数 A と代数射 $K \longrightarrow A$ とのペアを意

味する．K環(A,ι)は一元$\bar{x}$で生成され定義関係式

$$\bar{x}^2=\sum_{i,j}\zeta^{ij}e_{ij}\,,\quad \bar{x}e_{ij}=e_{ji}\bar{x}\quad(i,j\in\mathbb{Z}/n)$$

を持つものとする．余代数構造$\Delta:A_\zeta\longrightarrow A_\zeta\otimes A_\zeta$，$\varepsilon:A_\zeta\longrightarrow k$は

$$\Delta(\bar{x})=\sum_{ijrs}\zeta^{jr}e_{ij}\bar{x}\otimes e_{rs}\bar{x}\,,\quad \varepsilon(\bar{x})=1\qquad(*)$$

で定義されるK環射．ここに代数$A_\zeta\otimes A_\zeta$，kはそれぞれ$K\xrightarrow{\Delta_K}K\otimes K\xrightarrow{\iota\otimes\iota}A_\zeta\otimes A_\zeta$，$K\xrightarrow{\varepsilon_K}k$と共にK環と見る．最後に$\pi$は$\pi(\bar{x})=1$，$\pi(c)=\varepsilon_K(c)1\ (c\in K)$で定義される代数射とする．

第2の計算例に移ろう([M1])．

<定理>次で定義されるmatched pairを考える：

$F=C_n=\langle x\rangle,\quad G=C_n\times C_n=\langle a\rangle\times\langle b\rangle,$

$\triangleright$はトリビアル，$\triangleleft$は$a^ib^j\triangleleft x=a^{i+j}b^j\ (i,j\in\mathbb{Z}/n)$

で定義される群同形の作用．

$(k^\cdot)^n=k^\cdot$ならば

$$\mathrm{Opext}(kF,k^G)\simeq\begin{cases}\mu_n\times\mu_n & (n\ \text{奇数})\\ \mu_n\times(\mu_n/\{\pm1\}) & (n\ \text{偶数})\end{cases}\qquad\square$$

nが奇数の場合に$(\zeta,\eta)\in\mu_n\times\mu_n$に対応する拡大の中項$A_{\zeta,\eta}$を記述しておこう($\iota,\pi$は前と同様)．$K=k^G$を前のとおりとする．$A_{\zeta,\eta}$はK環として一元$\bar{x}$で生成され定義関係式

$$\bar{x}^n = \sum_{i,j} \eta^j e_{ij}, \quad \bar{x} e_{ij} = e_{i-j,j} \bar{x} \quad (i, j \in \mathbb{Z}/n)$$

をみたす．Δ, ε は (*) と同じ式で定義される K 環射．この $A_{\zeta,\eta}$ は $\zeta \neq 1$ ならば自己双対 ($A_{\zeta,\eta} \simeq A_{\zeta,\eta}^*$) という著しい性質をもつ．

<u>半単純ホップ代数の分類</u>　さらに k を標数ゼロの代数閉体，$n = p$ を奇素数とする．$A_{\zeta,\eta}$ ($\zeta \neq 1$) はいずれも p^3 次元のノン・トリビアル半単純ホップ代数である．逆にそのようなホップ代数はこれらで尽される．ただし２つのホップ代数拡大が同形でなくてもそれらの中項が同形であり得るから，$A_{\zeta,\eta}$ の間の同形・非同形を判定する必要がある．実際，

〈定理〉[M2]　k, p を直前のとおりとする．$1 \neq \zeta \in \mu_p$, $f \in \mathbb{F}_p^{\cdot} \setminus (\mathbb{F}_p^{\cdot})^2$ を任意に選び固定するとき，p^3 次元半単純ホップ代数のうちノン・トリビアルのものは

$$A_{\zeta,1}, \ A_{\zeta^f,1}, \ A_{\zeta,\zeta}, \ A_{\zeta^2,\zeta}, \ldots\ldots, A_{\zeta^{p-1},\zeta}$$

のうちのただ１つに同形である．

〈注意〉筆者にとってホップ代数拡大の考察は，半単純ホップ代数の分類が動機にあった．素数巾次元の半単純ホップ代数は巾零群の性質をもつので，分類が拡大の考察に帰着できるのである．分類結果として現在のところ他に，k を標数ゼロの代数閉体とするとき，素数 p 次元のホップ代数は必ず半単純で kC_p に等しいこと (Y. Zhu)，p^2 又は $2p$ 次元の半単

純ホップ代数はトリビアルなものに限ること（筆者）などが知られている．

計算例もうひとつ　$\triangleright$, $\triangleleft$ が共にノン・トリビアルなる matched pair を定義するため次のことを注意しよう．L は有限群であって，F, G を部分群にもち，積 $F \times G \longrightarrow L$, $(x, s) \mapsto xs$ が全単射であるとする．このとき

$$sx = (s \triangleright x)(s \triangleleft x) \qquad (s \in G,\ x \in F)$$

を以って定義される $\triangleright$, $\triangleleft$ は matched pair の構造であり，積 $F \bowtie G \longrightarrow L$ は群同形となる．

〈例〉 $n \geq 4$ を整数とし，$L = S_n$（n次対称群）にとる。巡回置換 $a = (1\,2 \dots n)$ に対し部分群 F, G を

$$F = \langle a \rangle = C_n, \qquad G = \{ s \in S_n \mid s(n) = n \} = S_{n-1}$$

により定義する．これらは上の条件をみたすから matched pair (S_{n-1}, C_n) が得られる．$\triangleright$, $\triangleleft$ は共にノン・トリビアルで特に

$$s \triangleright a^i = a^{s(i)} \qquad (s \in S_{n-1},\ 1 \leq i \leq n-1).$$

一方 $\triangleleft$ は具体的に書き下せない．

〈定理〉[M1] $(k^{\cdot})^n = k^{\cdot}$ ならば上で得られた matched pair (S_{n-1}, C_n) に関し $\mathrm{Opext}(kC_n, k^{S_{n-1}}) = 0$. □

ところで群拡大の場合と同様，ホップ代数拡大にもコホモ

ロジカルな記述が存在する. 実際 $\mathrm{Opext}(kF, k^G)$ はある2重コチェイン複体の全複体の第3コホモロジー群と同形になる. 前2つの計算例に於てはコホモロジーを扱うのは得策でなかった。生成元と関係式という最も素朴な方法で思いのほか容易に結果が得られるのである. 設定が複雑で結論が単純という. 最後の例に至ってはじめてコホモロジーに頼ることになる。

<u>Kacのコホモロジー完全列</u>　かくして最後の定理の証明にはKacによる次の5項完全列[K; M1]を用いる:

$$H^2(F\times G) \longrightarrow H^2(F)\oplus H^2(G) \longrightarrow \mathrm{Opext}(kF, k^G)$$
$$\longrightarrow H^3(F\times G) \longrightarrow H^3(F)\oplus H^3(G) \quad (\text{完全})$$

ここに $H^{\bullet}(\ )$ はトリビアル加群 $k^{\bullet}$ を係数にもつ群コホモロジーを表す. この興味深い完全列は, 先に述べた2重コチェイン複体を見て群コホモロジーが導来関手 $\mathrm{Ext}^{\bullet}$ に等しいことをキーとして得られる.

申し遅れたが, 最後の完全列を除けば, 拡大に関する諸結果は kF, k^G より一般に余可換ホップ代数H, 可換ホップ代数Kに関して成立つ(Singer, Hofstetter). ただKacの完全列だけは, ホップ代数のコホモロジーが何かの導来関手に等しいことを期待しづらい以上, $H=kF$, $K=k^G$ の場合特有のものと思われる.

<u>カッツ代数拡大，ホップ代数拡大</u>　元来有限 ring group，今日でいう有限次元カッツ代数，とは複素数体$\mathbb{C}$上の半単純＊ホップ代数のことであり，Kac [K] 自体$\mathbb{C}F$の$\mathbb{C}^G$によるカッツ代数拡大の理論である．それを考えるには，コホモロジーに関し係数$\mathbb{C}^{\cdot}$を

$$U = \{\alpha \in \mathbb{C}^{\cdot} \mid |\alpha| = 1\}$$

に制限する必要がある．我々はここまで一般の体k上で考えるかわりに＊構造を無視してきた．しかし普遍係数定理により

$$H^{\bullet}(\Gamma, \mathbb{C}^{\cdot}) = H_{\bullet}(\Gamma, \mathbb{Z}) = H^{\bullet}(\Gamma, U) \quad (\Gamma \text{ 有限群})$$

だから，Kac完全列の結果としてカッツ代数拡大のOpext群とホップ$\mathbb{C}$代数拡大のOpext群とは一致するのである．

ここに述べた内容の詳細はプレプリント[M1]にあります．リクエスト下されば喜んで送らせていただきます．

最後になりましたが，今回の研究集会で終始お世話になりました関口先生，諏訪先生にお礼申し上げます．ありがとうございました．

文 献

[K] G. Kac, Extensions of groups to ring groups, Math. USSR Sbornik 5 (1968), 451–474.

[M1] A. Masuoka, Calculations of some groups of Hopf algebra extensions, preprint, 1995.

[M2] A. Masuoka, Self-dual Hopf algebras of dimension p^3 obtained by extension, J. Algebra, in press.

[T] M. Takeuchi, Matched pairs of groups and bismash products of Hopf algebras, Comm. Algebra 9 (1981), 841–882.